Wskazówka

Zadanie 6. *Sprawdź, czy następujące funkcjonały liniowe na rzeczywistych przestrzeniach unitarnych są postaci $\phi(h) = \langle h, h_0 \rangle$, $h \in X$ z pewnym h_0, gdzie $\langle \cdot, - \rangle$ jest iloczynem skalarnym na X. Wyznacz h_0 jeśli istnieje.*

(1) $X = c_{00}$, $\langle \{x_n\}_n, \{y_n\}_n \rangle = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n y_n$, $\phi(\{x_n\}_n) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} x_n$,

(2) $X = \mathcal{C}([0,1])$, $\langle f, g \rangle = \int\limits_0^1 f(t)g(t)dt$,

- $\phi(f) = \int\limits_0^{\frac{1}{2}} f(t)dt$,
- $\ldots$,
- $\ldots$,

$\ldots$

Uwaga 1. *Nie wprost. Zakładamy, że istnieje $g \in \mathcal{C}([0,1])$ takie, że $\phi(f) = \langle f, g \rangle$. Czyli zachodzi równość:*

$$\int_0^{\frac{1}{2}} f(t)dt = \int_0^1 f(t)g(t)dt.$$

Stąd

$$0 = \int_0^{\frac{1}{2}} f(t)dt - \int_0^1 f(t)g(t)dt =$$

$$\int_0^1 \chi_{[0,\frac{1}{2}]} f(t)dt - \int_0^1 f(t)g(t)dt = \int_0^1 f(t)(\chi_{[0,\frac{1}{2}]} - g(t))dt,$$

gdzie χ_A oznacza funkcję charakterystyczną zbioru A. Teraz, żeby dojść do sprzeczności wystarczy pokazć, że $\chi_{[0,\frac{1}{2}]} - g(t) = 0$ (bo wtedy $g \notin \mathcal{C}([0,1])$). Możemy więc założyć, nie wprost że $\chi_{[0,\frac{1}{2}]} - g(t) \neq 0$, czyli $\ldots$ korzystając z tego, że funkcja $\chi_{[0,\frac{1}{2}]} - g(t)$ jest ciągła na przedziale $(0, \frac{1}{2})$ oraz na $(\frac{1}{2}, 1)$ wynika, że $\ldots$ zatem podstawiając funkcję $f := \ldots$ otrzymujemy $\ldots$.